Aula 44

EDOs Lineares de Ordem Superior à Primeira

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Companheira}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Proposição: Sejam $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ e $b(t)$ funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o conjunto das soluções da equação diferencial ordinária linear homogénea de ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

constitui um espaço vectorial de dimensão n.
O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de um isomorfismo linear entre o espaço vectorial dos dados iniciais $\left(y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$ e o espaço vectorial das soluções.
O conjunto das soluções da equação não homogénea

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

constitui um espaço afim, obtido pela soma de uma solução particular não homogénea a todas as soluções do espaço vectorial das soluções homogéneas.

EDOs Lineares de Ordem Superior à Primeira de Coeficientes Constantes Homogéneas

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Operadores de Derivação

Proposição: Seja $D = \frac{d}{dt}$ o operador de derivação em ordem ao tempo. Então tem-se

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1) = D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2$$

para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.